

Gabarito - Nível Universitário

1. Perceba que independentemente do resultado da soma $f(1) + \dots + f(2023)$, sempre poderemos escolher $f(2024)$ de maneira que a soma de todos eles seja múltipla de 4. Logo, a resposta é 4^{2023} , que são as diferentes maneiras de definir $f(1), f(2), \dots, f(2023)$.

2. Veja que:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{1+2+1+2+\dots+1+2}{x} = \frac{1+1+\dots+1}{x} + \frac{2+2+\dots+2}{x} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \times \frac{2}{x} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{3}{2}.$

3. Colocando π^x em evidência, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{(e^x + \pi^x)^{\frac{1}{x}}\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \pi \left(\left(\frac{e}{\pi} \right)^x + 1 \right)^{\frac{1}{x}} \right\} \\ &= \{\pi\} \lim_{x \rightarrow \infty} \{(0+1)^{\frac{1}{x}}\} \\ &= \{\pi\}. \end{aligned}$$

Logo, a resposta é $\{\pi\} = \pi - \lfloor \pi \rfloor$.

4. Note que a matriz associada a T é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo:

$$T^n(0,1) = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que, claramente, é (f_n, f_{n+1}) .

5. Note que:

$$E = \frac{x^2 - (x^2y - x)^2}{x^4 + y^{10}} = \frac{-x^4y^2 + 2x^3y}{x^4 + y^{10}} = \left(\frac{x^3y}{x^3y} \right) \left(\frac{-xy + 2}{\frac{x}{y} + \frac{y^9}{x^3}} \right) = \frac{-xy + 2}{\frac{x}{y} + \left(\frac{y^3}{x} \right)^3} = (*).$$

Mas $y^3 = x^2y - x$ nos diz que $\frac{y^3}{x} = xy - 1$. Daí:

$$(*) = \frac{-xy + 2}{\frac{x}{y} + (xy - 1)^3} = (**).$$

Também, $\frac{y^3}{x} = xy - 1$ implica que $\frac{x}{y} = \frac{y^2}{xy - 1}$, que claramente converge para 0 quando (x, y) vai pra $(0, 0)$. Logo, finalmente temos que

$$(**) \rightarrow \frac{-xy + 2}{(xy - 1)^3} = \frac{2}{-1} = -2.$$

6. Integrando por partes e aplicando a identidade $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, note que

$$\int e^x \tan(x) dx = e^x \tan(x) - \int e^x \sec^2(x) dx = e^x \tan(x) - \int e^x dx - \int e^x \tan^2(x) dx.$$

Logo, a integral desejada é

$$e^x \tan(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{4}}.$$

7. Defina $b_n = (4 + 2\sqrt{3})^n + (4 - 2\sqrt{3})^n$. Invocando o binômio de Newton, note que todos os b_n são inteiros. Logo, tanto $\cos(2\pi b_n)$ quanto $\sin(2\pi b_n)$ tendem a zero quando n tende para infinito. Logo:

$$\begin{aligned} a_n &= \cos(2\pi(b_n - (4 - 2\sqrt{3})^n)) = \cos(2\pi b_n - 2\pi(4 - 2\sqrt{3})^n) \\ &= \cos(2\pi b_n)\cos(2\pi(4 - 2\sqrt{3})^n) + \sin(2\pi b_n)\sin(2\pi(4 - 2\sqrt{3})^n). \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi(4 - 2\sqrt{3})^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(0) = 1.$$

8. Dado (a, b) aleatório, note que

$$\begin{cases} 7x + 9y = a \\ 2x + 3y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 3b \\ y = \frac{7b - 2a}{3} = 2b - a + \frac{a+b}{3} \end{cases}$$

Logo, tudo dará certo quando essa fração for, na verdade, um número inteiro. Para isso, basta escolher um a qualquer, e tomar b como um complementar $\text{mod } 3$. Ou seja, para todos a , teremos $\frac{1}{3}$ de inteiros b que fazem a conta dar certo. Logo, a resposta é $\frac{1}{3}$.

9. Primeiro vamos provar que não há dois números de 2024 a 4047 com o mesmo maior divisor ímpar. Suponha, por absurdo, que $p(n) = p(m) = k$. Então

$$\begin{cases} n = 2^i \cdot k \\ m = 2^j \cdot k \end{cases}$$

o que é um absurdo, pois isso significaria que n é o dobro (ou quádruplo, ou oito vezes, ...) de m . Porém, não há dois números de 2024 a 4047 que obedeçam a essa conclusão.

Logo, todos números de 2024 a 4047 resultam em $p(n)$ distintos. Como há 2024 números nesta faixa, os respectivos ímpares $p(n)$ são todos os primeiros 2024 ímpares, ou seja, todos ímpares de 1 a 4047. Logo, utilizando a fórmula da soma de uma PA e como $p(n) = 253$:

$$1 + 3 + \cdots + 4047 + p(4048) = \frac{4048 \cdot 2024}{2} + 253 = 2024^2 + 253.$$