Gabarito - Nível Universitário

1. d) Mostraremos que para x e y inteiros positivos maiores ou iguais a 2 temos que $2^{x+y} > 2^x + 2^y$. Sem perda de generalidade consideremos $x \geq y$. Deste modo:

$$2^x + 2^y \leq 2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x = 2^{x+1} < 2^{x+y}.$$

Voltando ao problema, nós temos $2^{a+b+c} > 2^{a+b} + 2^c > 2^a + 2^b + 2^c$. Também temos $2^{a+b+c} > 2^a + 2^{b+c}$. Isso mostra que 2^{a+b+c} é maior.

2. c) Note que existem seis triângulos pequenos que apontam para cima. Desses, você pode pintar no máximo dois lados de cada um. Logo, no máximo podemos pintar 12 lados. Se destes triângulos pintamos somente os lados laterais(aqueles que não são base), então nenhum pequeno é formado com todos os seus lados azuis porque não pintamos nenhum lado horizontal e todos os triângulos têm lados horizontais. Isso mostra que você pode pintar com 12.

3. b) Como a soma dos dígitos é 18, então é divisível por 9 e permanece $3^2 \cdot 41527$. Pode ser mostrado por contagem que 41527 é primo, mas também, pode ser usado a hipótese adicional do problema. Como o número tem 6 divisores, ele deve ser da forma p^2q ou p^5 com p e q primos. Porém a soma dos dígitos de 41527 é 19, então não é mais divisível por 3. Isso mostra que o número é da forma p^2q. Já sabemos que o número é divisível por 3 e portanto $q = 41527$ deve ser primo.

4. b) Veja que $a^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$, assim que $a \leq 1$. A partir desta desigualdade se deduz que $a^2(1-a) \geq 0$. Similarmente, $b^2(1-b) \geq 0$ e $c^2(1-c) \geq 0$. Então, temos que:

$$0 \leq a^2(1-a) + b^2(1-b) + c^2(1-c) = a^2 - a^3 + b^2 - b^3 + c^2 - c^3 = 1 - 1 = 0.$$

Desta forma, a igualdade deve ser satisfeita na primeira desigualdade. Isto mostra que cada soma é zero, e portanto cada um de a, b e c ou é 0 ou é 1. Como $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, exatamente um deles é 1, e isso mostra que $a + b + c = 1$.

Nota: Como é uma prova de múltipla escolha, o problema também pode ser resolvido com um caso particular. Por exemplo, tomando $a = b = 0, c = 1$ a hipótese é cumprida e a soma é 1, então essa deve ser a resposta.

5. d) O determinante desta matriz é $8+x+x-2x^2-2-2 = -2x^2+2x+4 = -2(x^2-x-2) = -2(x-2)(x+1)$. É anulado quando $x = 2$ ou quando $x = -1$.

Nota: Vendo as respostas também pode se resolver o problema. Veja que com $x = 2$ a primeira linha e a última são iguais, já que o determinante da matriz é 0. Com $x = -1$ a linha do meio é a soma das outras duas, portanto as linhas não são linearmente independentes e portanto o determinante é 0.

6. b) Perceba que $n^2 - 9 = (n+3)(n-3)$ e $20n - 60 = 20(n-3)$. Assim, podemos analisar a divisibilidade em duas situações: primeiramente, se $n = 3$ temos uma solução, visto que 0 divide 0. Já de forma mais geral, o problema será satisfeito se, e somente se $n + 3$ divide 20. Como n é um inteiro positivo , $n + 3 \geq 4$. Os divisores de 20 que são maiores ou iguais que 4 são 4, 5, 10 e 20. Desta forma, são mais quatro possibilidades, totalizando cinco valores possíveis para n.

7. a) Note que tanto A como B tem n somas, veja que:

$$A - B = (2-1) + (4-3) + \ldots + (2n - (2n-1)) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

Alternativamente, se pode calcular explicitamente cada soma:

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

$$2 + 4 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + \ldots + n) = n(n-1).$$

Desta forma, $A - B = n$ também. De qualquer forma nós temos que $n = A - B = 100$.

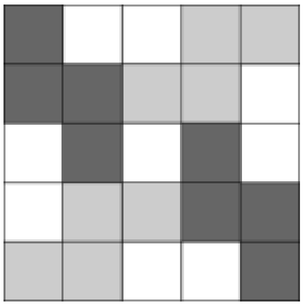
8. b) Há 3 formas de escolher o par de vértices que serão compartilhados. Vejamos o que acontece se o par compartilhar AB. Então o terceiro vértice do novo triângulo tem 3 opções:

- Permanecer do lado oposto de C com relação a AB e fazer um triângulo com a mesma orientação de AB.
- Permanecer do lado oposto de C com relação a AB e fazer um triângulo com orientação distinta de AB.
- Permanecer do mesmo lado que C com relação a AB e fazer um triângulo com orientação distinta de AB.

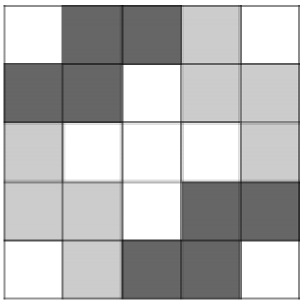
Assim cada par tem três possibilidades e portanto no total há 9 triângulos.

Nota: É impossível que o terceiro vértice permaneça no mesmo lado que C com respeito a AB e fazer um triângulo com a mesma orientação porque coincidiria com ABC e então compartilhariam 3 vértices. A hipótese de ser escaleno justifica que os casos enunciados não se repitam.

9. b) A única forma de cubrir as esquinas é como indica o seguinte desenho:



Dos quadradinhos que não foram cobertos, é impossivel cobrir 3 deles com uma ficha. Com 9 quadradinhos restantes para serem preenchidos, são necessários ao menos outras 5 fichas. Então, no total são necessários ao menos 9 fichas. Agora, se nós sobrepormos o desenho anterior com o seguinte:



só faltaria cobrir o quadrado central. Este se cobre com uma ficha a mais, Ou seja são necessárias 9 fichas para cobrir todo o desenho.

10. d) Trabalharemos módulo 7 (por ser primo, tudo fica ainda mais fácil). As soluções estão em bijeção com as soluções módulo 7, ou seja, queremos $x^2+y^2-z^2 \equiv 0(mod\, 7)$. Isto é equivalente a pedir que $y^2 \equiv z^2-x^2(mod\, 7)$ ou que
$$y^2 \equiv [(z+x)(z-x)](mod\, 7)$$
Vamos dividir em dois casos.
   - Se $z+x \equiv 0(mod\, 7)$, então $y=0$ e $z-x$ pode tomar qualquer valor. Assim, basta definir o valor de z para que o valor de x seja definido ($x=-z$). Desta forma, estes casos são totalmente determinados pelo valor de z e, portanto, há 7 possibilidades.
   - Se $z+x \equiv 0(mod\, 7)$, então temos inverso módulo 7. Ao fixar um valor de $z+x$ notamos que $z-x = (z+y)^{-1}y^2$. Se também fixarmos um valor de y, então $z-x$ é determinado. Sabendo $z+x$ e $z-x$ podemos obter o valor de z e de x (por exemplo $z = 2^{-1}((z+x)+(z-x))$). Deste modo, neste caso tudo é determinado pela escolha de um dos 6 possíveis valores de $z+x$ e um dos 7 valores possíveis de y. Isto mostra que este caso tem 42 possibilidades.
   Desta forma , há $7+42=49$ possibilidades.

11. c) Como as entradas dos vetores estão em $\{0,1\}$, as entradas das direções só podem estar em $\{-1,0,1\}$. Cada direção tem três entradas que tem três valores possíveis, assim podem existir 27 direções. Devemos excluir a opção $\{0,0,0\}$ pois a definição de direção só contempla valores distintos.

Para qualquer outra direção podemos construir dois vetores que a geram. Para isto:

- Se quisermos que em uma coordenada apareça -1, nós colocamos a entrada 0 em u e 1 em v.

- Se quisermos que em uma coordenada apareça 0, nós colocamos a entrada 0 em u e 0 em v.
- Se quisermos que em uma coordenada apareça 1, nós colocamos a entrada 1 em u e 0 em v.

Isto mostra que existem 26 direções possíveis.

12. b) Em qualquer base fixa se um número tem mais dígitos que o outro então ele é maior. Desta forma, o maior número na base 4 com 6 dígitos é $(111111)_4 = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 = 1365$. Por outro lado, um número na base 4 com a soma de dígitos 6 não pode ter somente um dígito. Mas pode ter 2. E neste caso se força a ser $(33)_4 = 3(1 + 4) = 15$.

    Desta forma, $M - m = 1365 - 15 = 1350$.