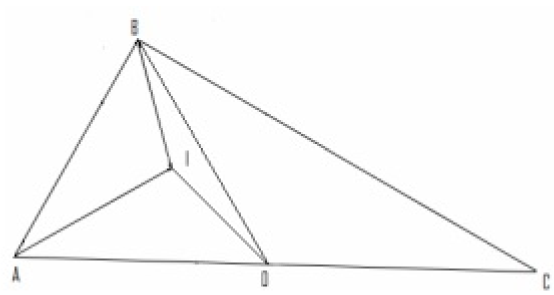
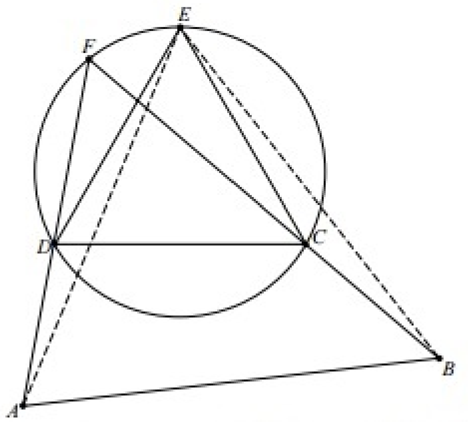
Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Blumenau
Treinamentos para Olimpíadas de Matemática

Gabarito 7 - Nível 3

1. Como ABC é um triângulo retângulo, então $AO = BO = CO$. Se o $A\hat{B}I = A\hat{O}I = 45$ e $B\hat{A}I = O\hat{A}I$, então $\Delta ABI \equiv \Delta AOI$ (ALA). Com isso, $AB = AO = BO$, e portanto, triângulo ABO é eqüilátero. Assim, o $A\hat{C}B = 30$.



2. Prolongue AD e BC até se encontrarem no ponto F.

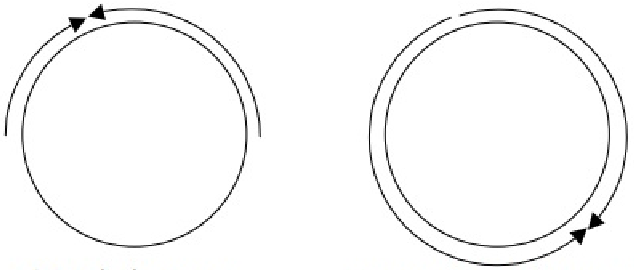


Veja que $A\hat{F}B = 60° = D\hat{E}C$. Com isso, o quadrilátero $FECD$ é inscritível. Note também que $F\hat{D}E = F\hat{C}E \Rightarrow A\hat{D}E = B\hat{C}E$ e já que $AD = BC$ e $ED = EC$, concluímos que $\Delta ADE \equiv \Delta BCE$. Portanto, $EA = EB$.
Além disso, $D\hat{E}A = C\hat{E}B$, de onde concluímos que $A\hat{E}B = D\hat{E}C = 60°$. Dessa forma, o triângulo ABE é eqüilátero de lado 8 e sua área é igual a $\frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}cm^2$.

3. Sejam a, b, c e d algarismos tais que o par (ab, cd) é centenário. Então, $(10a + b) + (c + d) = (10c + d) + (a + b) = 100$ como $b + c + d \leq 27$, $10a \geq 73$, e assim $a \geq 8$ e, de modo análogo, $c \geq 8$. Ainda mais, $(10a + b) + (c + d) = (10c + d) + (a + b) \Leftrightarrow 9a = 9c \Leftrightarrow a = c$.
Temos então 2 casos:
I) $a = c = 8 \Rightarrow 80+b+8+d = 100 \Leftrightarrow b+d = 12$, sendo esta uma condição necessária e suficiente para o par em questão ser centenário. Obtemos assim os 7 seguintes pares: $(83; 89)$, $(84; 88)$, $(85; 87)$, $(86; 86)$, $(87; 85)$, $(88; 84)$ e $(89; 83)$.
II) $a = c = 9 \Rightarrow 90 + b + 9 + d = 100 \Leftrightarrow b + d = 1$, obtendo outros 2 pares centenários: $(90; 91)$ e $(91; 90)$.
Há, assim, 9 pares centenários.

4. Seja J a interseção dos segmentos BC e FG. Como M é ponto médio do segmento BC, oposto ao vértice E, conclui-se que EF é diâmetro, e $F\hat{G}E = B\hat{M}F = 90°$. Sendo $ABCDE$ um pentágono regular, $A\hat{B}C = 108°$.
No $\Delta GHI : G\hat{H}I = \alpha \Rightarrow G\hat{I}H = 90° - \alpha$.
No $\Delta BJH : B\hat{H}J = \alpha \Rightarrow B\hat{J}H = 72° - \alpha$.
No $\Delta FJM : F\hat{J}M = 72° - \alpha \Rightarrow J\hat{F}M = 18° + \alpha$.
Para que os triângulos EFG e HIG sejam semelhantes, como $\alpha \neq 18° + \alpha$, a única possibilidade é termos $90° - \alpha = 18° + \alpha \Leftrightarrow \alpha = 36°$.

5. No momento do primeiro cruzamento, Esmeralda e Jade percorreram a distância total igual à metade da extensão da pista. Entre o primeiro e o segundo cruzamento, as moças percorreram uma distância total igual à extensão da pista. Portanto Esmeralda correu o dobro da distância que correu até o primeiro cruzamento, ou seja, $2 \cdot 200 = 400$ metros e, deste modo, a extensão da pista é $400 + 350 = 750$ metros.



Até o primeiro encontro　　　　Entre o primeiro e o segundo encontro