**Universidade Federal de Santa Catarina**
**Campus Blumenau**
**Treinamentos para Olimpíadas de Matemática**

## Gabarito 7 - Nível 2

1. Os números da coluna do meio podem ser dados por: $1+2+4+6+8+\cdots+2n = n^2+n+1$. Dessa forma o número do topo é: $44^2+44+1 = 1981$. Como 1981 está no 45º andar, e $2006-1981 = 25$, 2006 deve estar no 20º andar.

2. Podemos representar os três inteiros consecutivos por $n-1$, $n$ e $n+1$. Temos

$$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = 302 \Leftrightarrow n^2-2n+1n^2+n^2+2n+1 = 302 \Leftrightarrow 3n^2+2 = 302$$

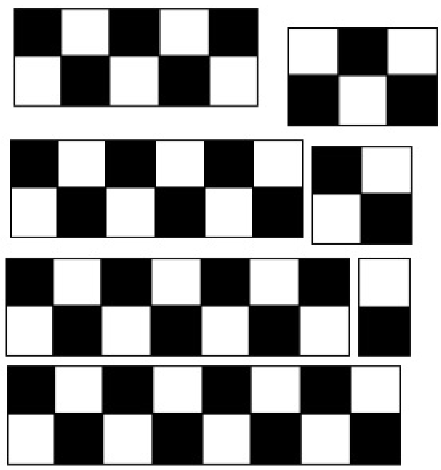
que implica

$$\Leftrightarrow 3n^2 = 300 \Leftrightarrow n^2 = 100 \Leftrightarrow n = 10 \text{ ou } n = -10$$

Portanto, os três inteiros consecutivos são $-11, -10$ e $-9$ ou 9,10 e 11. Se admitirmos que estamos falando de inteiros positivos, a resposta é $9+10+11 = 30$. Rigorosamente falando a resposta deveria ser: se os inteiros são positivos, então a sua soma é 30 e se os inteiros são negativos, então sua soma é $-30$.

3. Observe que os triângulos $AXY$ e $ANM$ são congruentes com área $4\,cm^2$, e $< YXA =< AMN$. Assim, $XY||MN$ e como $XY = MN = MB = NC$, segue que os quadriláteros $XYNC$ e $XYBM$ são paralelogramos com mesma área. Como $A$ é ponto médio de $XM$ e $NY$ temos que área$(\triangle AYB) =$ área$(\triangle ANB) = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8$ e, portanto, área$(XYNC) =$ área$(XYBM) = 8+4+4 = 16$. Logo, área$(XYBC) = 16+8+4+4 = 32$.

4. Cada retângulo da decomposição possui um número par de casas, pois possui a mesma quantidade de casas brancas e pretas. Veja que a maior quantidade de números pares distintos tais que a soma não supera 64 é $2+4+6+8+10+12+14 = 56$, pois $2+4+6+8+10+12+14+16 = 72$, ou seja, a soma de 8 números pares distintos é sempre maior que 64. Portanto, a decomposição pode ter no máximo 7 retângulos. Abaixo uma decomposição com 7 retângulos.



5. Fatorando a expressão dada, temos $(x-y)(x+y) = 36$. Como a soma de $x+y$ e $x-y$ é par, ou ambos são pares ou ambos são ímpares. Como 36 é par, ambos são pares e podemos escrever: $\frac{x-y}{2}\cdot\frac{x+y}{2} = 9$. Como $\frac{x+y}{2} > 0$ e 9 possui apenas $\{1, 3, 9\}$ como divisores positivos, sabendo que $\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{2} > 0$ concluímos que: $\frac{x-y}{2} = 1$ e $\frac{x+y}{2} = 9$. Resolvendo o sistema resultante, temos $(x, y) = (10, 8)$.