Gabarito 6 - Nível 3

1. Observe que para $i \geq 1$ temos
$\lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor = i \Leftrightarrow i \leq \sqrt[4]{n} < i+1 \Leftrightarrow i^4 \leq n < (i+1)^4$ e assim há $(i+1)^4 - i^4$ números n tais que $\lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor = i$.
Portanto a soma pedida é
$1 \cdot (2^4 - 1^4) + 2 \cdot (3^4 - 2^4) + 3 \cdot (4^4 - 3^4) + 4 \cdot (5^4 - 4^4) + 5 \cdot (6^4 - 5^4) + 6 \cdot ({}^2008 - 6^4 + 1) = 9779.$

2. Da propriedade, decorre que 9 só pode aparecer ou como primeiro ou como último elemento da permutação e que os elementos de 1 a 8 formam uma permutação com a mesma propriedade. Assim, o número pedido é o dobro do número de permutações de $1, 2, \ldots, 8$ com a mesma propriedade. Da mesma forma, o número de permutações de $1, 2, \ldots, 8$ com a propriedade é o dobro do número de permutações de $1, 2, \ldots, 7$ com a propriedade. Repetindo o raciocínio, concluímos que o número pedido é portanto $2^8 = 256$.

3. Vamos mostrar que o menor produto é obtido quando tomamos os elementos da diagonal principal. Neste caso, o produto é dado por $(1+1)(2+2)(3+3)\cdots(2008+2008)$.
Suponha que todos os elementos $(1,1), (2,2), \ldots, (i-1, i-1)$ tenham sido escolhidos mas que os elementos nas $i-$ésimas linha e colunas sejam (i,j) e (k,i) com j e k maiores ou iguais a $i+1$. Vamos mostrar que trocando estes dois elementos por (i,i) e (k,j) obtemos um produto menor. De fato, para isto devemos mostrar que
$$(i+i)(j+k) < (i+j)(i+k) \Leftrightarrow 2i(j+k) < i^2 + (j+k)i + jk \Leftrightarrow i^2 - (j+k)i + jk > 0 \Leftrightarrow (i-j)(i-k) > 0$$
que é verdade, já que $i - j < 0$ e $i - k < 0$.

4. Seja a fatoração de $123456 = 2^6 \cdot 3 \cdot 643$ e seja d um de seus divisores menores do que 2007. Podemos analisar dois casos:
$-d$ não é múltiplo de 643: então d é um divisor de $2^6 \cdot 3 = 192 < 2007$. Portanto podemos contar todos os divisores de 192, que são $(6+1)(1+1) = 14$ divisores.

$-d$ é múltiplo de $643 : 1 \cdot 643 = 643, 2 \cdot 643 = 1286$ e $3 \cdot 643 = 1929$ são menores que 2007, mas a partir de $4 \cdot 643 = 2572$, eles são maiores que 2007. Portanto há 3 divisores neste caso.

Portanto o total de divisores d de 123456 menores do que 2007 é $14 + 3 = 17$.

5. Inicialmente, temos $\underbrace{11\cdots1}_{1000 \text{ uns}} = \dfrac{\overbrace{99\cdots9}^{1000 \text{ noves}}}{9} = \frac{10^{1000}-1}{9}$. Portanto, $\underbrace{11\cdots1}_{1000 \text{ uns}} = \sqrt{\frac{10^{1000}-1}{9}}$. Com isso, observando que
$$\sqrt{\frac{10^{1000}-1}{9}} = \sqrt{\frac{(10^{500}-1)(10^{500}+1)}{9}} > \sqrt{\frac{(10^{500}-1)(10^{500}-1)}{9}} = \frac{10^{500}-1}{3}$$
e
$$\sqrt{\frac{10^{1000}-1}{9}} < \sqrt{\frac{10^{1000}}{9}} = \frac{10^{500}}{3}$$
temos $\frac{10^{500}-1}{3} < \underbrace{11\cdots1}_{1000 \text{ uns}} < \frac{10^{500}}{3}$.
Como $\frac{10^{500}-1}{3}$ é inteiro e seu consecutivo, $\frac{10^{500}+2}{3}$, é maior do que $\frac{10^{500}}{3}$, o inteiro mais próximo de $\underbrace{11\cdots1}_{1000 \text{ uns}}$ é
$\frac{10^{500}-1}{3} = \dfrac{\overbrace{99\cdots9}^{500 \text{ noves}}}{3} = \underbrace{33\cdots3}_{500 \text{ noves}}$, cuja soma dos dígitos é $3 \cdot 500 = 1500$.