Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Blumenau
Olimpíada Regional de Matemática

Gabarito 2 - Nível Universitário

1. Note que se $g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ então

$$\begin{aligned} g(u) - g(v) &= a_n(u^n - v^n) + \cdots + a_1(u - v) \\ &= (u - v)R(u, v) \end{aligned}$$

para um certo polinômio em duas variáveis $R(u, v)$. Logo, se $f(x) = g(h(x))$ então

$$f(x) - f(y) = g(h(x)) - g(h(y)) = (h(x) - h(y))R(h(x), h(y))$$

denotando $q(x, y) := R(h(x), h(y))$, temos a primeira implicação.

Vamos provar a volta por indução no grau de f. Se o grau de f é 0, as duas afirmações são verdadeiras. Suponha agora que f tem grau maior ou igual a 1 e que $f(x) - f(y) = q(x, y)(h(x) - h(y))$ (daí segue que h não é constante). Fazendo $y = 0$ obtemos $f(x) - f(0) = q(x, 0)(h(x) - h(0))$ para todo x e, portanto, $f(y) - f(0) = q(y, 0)(h(y) - h(0))$ para todo y. Subtraindo as equações, segue

$$\begin{aligned} q(x, y)(h(x) - h(y)) &= f(x) - f(y) \\ &= q(x, 0)(h(x) - h(0)) - q(y, 0)(h(y) - h(0)) \\ &= q(x, 0)(h(x) - h(y)) + (q(x, 0) - q(y, 0))(h(y) - h(0)). \end{aligned}$$

Assim, $h(x) - h(y)$ divide o polinômio $(q(x, 0) - q(y, 0))(h(y) - h(0))$. Como h não é constante e $h(y) - h(0)$ é polinômio somente na variável y, segue que $h(x) - h(y)$ não tem fator comum (não constante) com $h(y) - h(0)$ e, portanto, $h(x) - h(y)$ divide o polinômio $q(x, 0) - q(y, 0)$. Defina $\tilde{q}(x) = q(x, 0)$. Temos

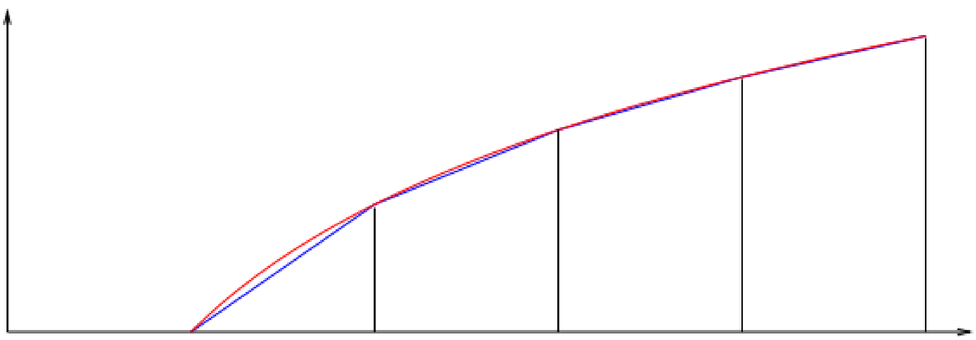
$$f(x) - f(0) = q(x, 0)(h(x) - h(0)) = \tilde{q}(x)(h(x) - h(0))$$

donde o grau de $\tilde{q}$ é menor que o grau de f. Por outro lado, $h(x) - h(y)$ divide o polinômio $\tilde{q}(x) - \tilde{q}(y)$ e, portanto, pela hipótese de indução, existe polinômio $\tilde{g}(x)$ tal que $\tilde{q}(x) = \tilde{g}(h(x))$, donde

$$f(x) = f(0) + \tilde{q}(x)(h(x) - h(0)) = f(0) + \tilde{g}(h(x))(h(x) - h(0)) = g(h(x))$$

onde $g(x) := f(0) + \tilde{g}(x)(x - h(0))$, completando a demonstração.

2. Ilustrando o problema para $n = 5$:



Temos a região A_5 abaixo da curva vermelha, B_5 abaixo da poligonal azul e C_5 entre ambas. Assim

$$\begin{aligned} \text{Área}(A_n) &= \int_1^n \ln(t)dt = n\ln(n) - n + 1; \\ \text{Área}(B_n) &= \ln(2) + ln(3) + \cdots + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln(n) = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n); \\ \text{Área}(C_n) &= n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + 1 - \ln(n!). \end{aligned}$$

Para o item (b), note que

$$a_k = \int_k^{k+1} \ln(t) - \ln(k) - (t-k)(\ln(k+1) - \ln(k))dt$$

é a área da k-ésima bochecha entre as duas linhas. Assim

$$\text{Área}(C_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Defina $u_k(t) = \ln(t) - \ln(k) - (t-k)(\ln(k+1) - \ln(k))$ e, visto que u_k zera em k e em $k+1$:

$$\begin{aligned} -\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) u_k'(t)dt &= -\int_k^{k+1} tu_k'(t)dt - \int_k^{k+1} \left(k - \frac{1}{2}\right) u_k'(t)dt = \\ &= -\int_k^{k+1} tu_k'(t)dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$-\int_k^{k+1} tu_k'(t)dt = -tu_k(t)]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} u_k(t)dt = \int_k^{k+1} u_k(t)dt.$$

Também, $u_k^{''}(t) = -t^{-2}$. Assim, novamente integrando por partes:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_k^{k+1} u_k(t)dt = \\ &= -\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) u_k'(t)dt = \\ &= -\left[\frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 u_k'(t)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} \frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 u_k''(t)dt = \\ &= \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2\right)(-u_k''(t))dt. \end{aligned}$$

Para $k \leq t \leq k+1$ temos $-u_k''(t) < k^{-2}$ donde

$$a_k \leq k^{-2} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2\right) dt = \frac{1}{12k^2}.$$

Temos portanto

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots\right) \\ &\leq \frac{1}{12}\left(1 + \int_1^{\infty} t^{-2}dt\right) \\ &\leq \frac{1}{6} \end{aligned}$$

completando a demonstração.