Gabarito 1 - Nível Universitário

1. Dando coordenadas, suponha sem perda de generalidade que
$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (1,1,0),\ D = (0,1,0),$$
e
$$E = (0,0,1),\ F = (1,0,1),\ G = (1,1,1),\ H = (0,1,1).$$
Se as posições, em função do tempo, das duas naves são $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, respectivamente, se $t = 0$ é o instante em que $\alpha(t) = C$ e $\beta(t) = G$ e $t = -1$ é o instante em que $\alpha(t) = B$ temos
$$\alpha(t) = (1,1,0) + t(0,1,0),\ \beta(t) = (1,1,1) + \sqrt{3}t(1,1,1).$$
Assim, o quadrado da distância em função do tempo é
$$\begin{aligned} h(t) &= ((1) - (1+\sqrt{3}t))^2 + ((1+t) - (1+\sqrt{3}t))^2 + (0 - (1+\sqrt{3}t))^2 \\ &= 3t^2 + (\sqrt{3}-1)^2t^2 + 1 + 2\sqrt{3} + 3t^2 = (10 - 2\sqrt{3})t^2 + 2\sqrt{3}t + 1. \end{aligned}$$
Daí
$$h'(t) = (20 - 4\sqrt{3})t + 2\sqrt{3}.$$
Para $t_0 = \frac{-2\sqrt{3}}{20-4\sqrt{3}} = \frac{-(3+5\sqrt{3})}{44} \cong -0,265$ temos $h'(t_0) = 0$; para $t < t_0$ temos $h'(t) < 0$ e para $t > t_0$ temos $h'(t) > 0$.
Assim o mínimo do quadrado da distância é
$$h(t_0) = \frac{29 - 3\sqrt{3}}{44} \approx 0,541$$
e, portanto, a distância mínima é
$$\sqrt{0,541} \approx 0,7355.$$

2. Defina N_p como sendo o número de pares ordenados (x, y) com $x, y \in \{0, 1, \cdots p-1\}$ tais que $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de p. Vamos então provar que $N_{143} = N_{11} \cdot N_{13}$.
De fato, $5x^2 + 7y^2 - 1$ é múltiplo de 143 se, e somente se, é múltiplo de 11 e 13. Por outro lado, pelo teorema chinês dos restos, dados pares ordenados (x', y') com $x', y' \in \{0, 1, \cdots 10\}$ e (x'', y'') com $x'', y'' \in \{0, 1, \cdots 12\}$, existe um único par ordenado (x, y) com $x, y \in \{0, 1, \cdots 142\}$ tal que $x \cong x' \pmod{11}$, $x \cong x'' \pmod{13}$, $y \cong y' \pmod{11}$ e $y \cong y'' \pmod{13}$.

   Vamos então calcular N_{11} e N_{13}. Os possíveis valores $x^2 \pmod{11}$ são 0, 1, 4, 9, 5, 3, sendo cada valor não nulo atingido para duas classes de congruência módulo 11. Assim, 5 é quadrado módulo 11 mas 7 não é e, portanto, $5x^2 \pmod{11}$ assume os valores 0, 1, 3, 4, 5, 9, enquanto $7y^2 \pmod{11}$ assume os valores 0, 2, 6, 7, 8, 10 (nos dois casos os valores não nulos são assumidos duas vezes). Temos que 1 é o resultado módulo 11 da soma de números dessas duas listas nas formas $1+0$, $4+8$ e $5+7$, o que dá $2+4+4 = 10$ soluções módulo 11 de $5x^2 + 7y^2 - 1$ e, portanto, $N_{11} = 10$. Analogamente, os possíveis valores de $x^2 \pmod{13}$ são 0, 1, 4, 9, 3, 12, 10, sendo cada valor não nulo atingido para duas classes de congruência módulo 13. Assim, 5 e 7 não são quadrados módulo 13 e, portanto, $5x^2 \pmod{13}$ e $7y^2 \pmod{13}$ assumem os valores 0, 2, 5, 6, 7, 8, 11 (os valores não nulos são assumidos duas vezes). Temos que 1 é o resultado módulo 13 da soma de dois números dessa lista nas formas $6+8$, $8+6$ e $7+7$, o que dá $4+4+4 = 12$ soluções módulo 13 de $5x^2 + 7y^2 - 1$ e, portanto, $N_{13} = 12$.

   Assim, a resposta do problema é $N_{143} = N_{11} \cdot N_{13} = 10 \cdot 12 = 120$.