Gabarito 3 - Nível 3

1. Suponha que haja alunos de 4 ou mais nacionalidades entre os 9 alunos da classe. Se escolhermos um aluno de cada nacionalidade não haverá dois alunos de mesma nacionalidade, o que é um absurdo. Logo há alunos de no máximo 3 nacionalidades. Da mesma forma, entre os 9 alunos não há 4 de mesma nacionalidade, pois se houvesse poderíamos formar um grupo de 5 alunos com mais de 3 alunos de mesma nacionalidade. Logo há no máximo 3 alunos de cada nacionalidade. Como há 9 alunos, no máximo 3 nacionalidades e no máximo 3 alunos por nacionalidade, há exatamente 3 nacionalidades e 3 alunos de cada nacionalidade. Em particular, há 3 alunos brasileiros.

2. Se após n dias haver uma ameba amarela e n amebas vermelhas, a probabilidade de uma ameba vermelha se duplicar é $\frac{n}{n+1}$. Logo a probabilidade de que a colônia tenha, após 2006 dias, exatamente uma ameba amarela é $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2006}{2007} = \frac{1}{2007}$.

3. Seja x o segundo termo. Então o terceiro termo é $\frac{20+x}{2}$, o quarto termo é $\frac{20+x+\frac{20+x}{2}}{3} = \frac{20+x}{2}$ e, indutivamente, o n-ésimo termo é $\frac{20+x+(n-3)\frac{20+x}{2}}{n-1} = \frac{20+x}{2}$. Assim, $6 = \frac{20+x}{2} \Leftrightarrow x = -8$.

4. Os produtos são da forma $P_n(2160 - n) = 2160n - n^2$. Como $2160n$ sempre é múltiplo de 2160, o produto P_n será múltiplo de 2160 se, e somente se, n^2 é múltiplo de 2160. Como $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$, n^2 é múltiplo de 2160 se, e somente se, n é múltiplo de $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Temos que, entre 1 e 2160, há $\frac{2160}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 12$ múltiplos de tal número. Portanto, já que P_0 também é múltiplo, há 13 múltiplos de 2160 dentre os produtos.

5. (d) A única maneira será o gafanhoto pulando 7 vezes para direita e 2 para esquerda, **DDDEDDEDD** por exemplo. Assim basta calcular as possíveis posições das letras **E** na sequência de 9 letras. Ou seja, temos que calcular a quantidade de combinações de 9 números em grupos de 2, $C_9^2 = 36$.

6. (c) Raciocinando de trás pra frente, temos $f(32) = 16 = f(5)$. Na etapa anterior segue $f(64) = 32$ e $f(10) = 5$. E antes, segue $f(128) = 64 = f(21)$ e $f(20) = 10 = f(3)$. Há, portanto, 4 soluções.