Gabarito 4 - Nível 2

1. Se a porta 1 não é segura, as mensagens 1 e 3 seriam simultaneamente falsas e isso contrariaria as informações do enunciado porque sabemos que apenas uma das mensagem o é. Vale observar que cada uma das outras portas pode ser a porta não segura, resultando em nenhuma ou duas mensagens falsas.

2. Sejam k a quantidade de sobrinhos e x a quantidade que cada um receberia na primeira divisão. Então: $k \cdot x + 10 = 250$ e $k(x-1) + 22 = 250$. Subtraindo uma equação da outra obtemos $k = 12$. Assim, cada um deles recebeu $x = 20$ reais.

3. Incialmente, o calendário gregoriano impôs uma vantagem de 10 dias em relação ao calendário juliano. Além disso, de lá para cá, para cada um dos anos múltiplos de 100 que não são de 400, a saber: 1700, 1800 e 1900; o calendário gregoriano ganhou mais um dia de vantagem totalizando assim 13 dias. Como o mês de maio possui 31 dias nos dois calendários, hoje seria o dia 21 de maio de 2014.

4. Pelo critério de divisibilidade por 8, os três últimos dígitos devem formar um número múltiplo de 8. A única opção admissível é $z = 4$. Pelo critério de divisibilidade por 11, $(x + 2 + z) - (y + 6) = x - y$ deve ser divisível por 11. Como x e y são dígitos, a única opção é $x = y$. Finalmente, pelo critério de divisibilidade por 9, $(x+y+2+6+z) = 2x+12$ deve ser divisível por 9. O único dígito que satisfaz tal condição é $x = 3$.

5. Sejam p e q as raízes da segunda equação. Usando as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do segundo grau:
$$p + q = b, pq = a, p^2 + q^2 = a, p^2q^2 = b$$
Daí, $3a = a + 2a = (p^2 + q^2) + 2pq = (p + q)^2 = b^2$ e $a^2 = p^2q^2 = b$, ou seja, $3a = b^2 = (a^2)^2 = a^4$. Como a é não nulo, devemos ter $a = \sqrt[3]{3}$.

6. **(E)** Como 2010 é múltiplo de 6, cada uma das três cores está equidistribuída tanto entre os números pares quanto entre os números ímpares dos 2010 primeiros números. Vejamos as cores dos próximos quatro números:

   2011(Amarela), 2012(Verde), 2013(Preta) e 2014(Amarela)

   O elemento 2013 faz os ímpares pretos terem uma unidade a mais do que os verdes ímpares.