Gabarito 2 - Nível 3

1. Observemos que todos os números primos menores ou iguais a n aparecem na fatoração de $n!$. Como 17 não é fator de $n!$, temos $n < 17$. Alem disso, como $n!$ tem 3 fatores 5 e os três primeiros múltiplos de 5 são 5, 10 e 15, que não têm mais de um fator 5, temos $n \geq 15$. Logo $n = 15$ ou $n = 16$. Como há $\frac{16}{2} = 8$ números pares menores ou iguais a 16, sendo $\frac{16}{4} = 4$ múltiplos de 4, $\frac{16}{8} = 2$ múltiplos de 2 e 1 múltiplo de 16, 16! admite $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ fatores 2, logo $n = 16$.

2. As 10 notas medianas são maiores ou iguais à maior das 10 piores notas e são menores ou iguais à menor das 10 melhores notas. Logo as 10 notas medianas são maiores ou iguais a 3 e menores ou iguais a 9. Deste modo, sendo M a média da sala,
$$\frac{10 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 9}{30} \leq M \leq \frac{10 \cdot 3 + 10 \cdot 9 + 10 \cdot 9}{30} \Leftrightarrow 5 \leq M \leq 7$$

3. Seja $N = x^2$, x inteiro positivo. Ao trocar cada algarismo de N pelo seu sucessor, obtemos um número 1 dezena e 1 unidade maior, ou seja, $N + 11$. Como $N + 11$ é quadrado perfeito, $N + 11 = y^2$, sendo y inteiro positivo. Logo $x^2 + 11 = y^2 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 11 \Leftrightarrow y - x = 1$ e $y + x = 11 \Leftrightarrow x = 5$ e $y = 6$. Logo $N = 5^2 = 25$, cuja soma dos algarismos é $2 + 5 = 7$.

4. Os números em questão são $12, 23, 34, 45, \ldots, 89$ (8 números), $123, 234, 345, \ldots, 789$ (7 números), $1234, 2345, \ldots, 6789$ (6 números) e, por fim, 12345, um total de $8 + 7 + 6 + 1 = 22$ números.

5. Em um poliedro, de cada vértice saem pelo menos três arestas. Assim, de cada vértice do hexágono sai pelo menos mais uma aresta. Assim, o poliedro tem pelo menos mais 6 arestas, totalizando, junto com as 6 arestas do hexágono, pelo menos 12 arestas. Um poliedro com uma face hexagonal e 12 arestas é uma pirâmide de base hexagonal, assim a quantidade mínima de arestas que um poliedro nas condições do enunciado pode ter é 12.

6. Sejam x e $13 - x$ a quantidade de números negativos e positivos, respectivamente. Assim, há $x(13 - x)$ pares de números com produto negativo. Logo $x(13 - x) = 22 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 22 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 11$. Como há mais positivos que negativos, há 2 números negativos.