Gabarito 1 - Nível 3

1. $f(4) = 5$; $f(f(4)) = f(5) = 2$; $f(f(f(4))) = f(2) = 1$; $f(f(f(f(4)))) = f(1) = 4$. Logo, como 2004 é múltiplo de 4, $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{2004 \text{ vezes}}(4))\ldots)) = 4$.

2. Sejam $a \leq b \leq c$ os lados do triângulo e S a sua área. Temos que $S = \frac{a \cdot 20}{2} = \frac{b \cdot 15}{2} = \frac{c \cdot 12}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$ e $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, ou seja, o triângulo tem lados proporcionais a 3, 4, 5 e portanto, é retângulo. Logo o maior ângulo interno é $90°$.

3. Considere os subconjuntos $\{1, 9, 17\}$; $\{2, 10, 18\}$; $\{3, 11, 19\}$; $\{4, 12, 20\}$; $\{5, 13\}$; $\{6, 14\}$; $\{7, 15\}$; $\{8, 16\}$. Nos quatro primeiros subconjuntos, tomando o menor e o maior número, a diferença não será 8. Nos quatro últimos subconjuntos podemos tomar apenas 1 elemento. Logo é possível construir um conjunto com $4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 12$ elementos onde nenhuma diferença é 12. Assim, o menor inteiro n é $12 + 1 = 13$.

4. Fazendo $n = 0$, temos $f(0) - f(2) = 9$ Fazendo $n = 2$, temos $f(2) - 3f(0) = 25$ Somando as duas igualdades, obtemos $-2f(0) = 34$, e logo $f(0) = -17$.

5. É possível formar os números $10 \cdot a + b, 10 \cdot b + a, 10 \cdot a + c, 10 \cdot c + a, 10 \cdot c + b, 10 \cdot b + c$ cuja soma é $22(a + b + c)$. Logo $22(a + b + c) = 484 \Leftrightarrow a + b + c = 22$. Então, sendo $0 \leq a < b < c \leq 9$, c é igual a 9. Listando as possibilidades, $6, 7, 9$ e $5, 8, 9$.

6. Seja a o número de faces ocres do segundo cubo, que tem portanto $6 - a$ faces magentas. A probabilidade de as duas faces terem a mesma cor (ocre e ocre ou magenta e magenta) é $\frac{5 \cdot a + 1 \cdot (6 - a)}{36} = \frac{4 \cdot a + 6}{36} = \frac{2 \cdot a + 3}{18}$. Temos $\frac{2 \cdot a + 3}{18} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot a + 3 = 9 \Leftrightarrow a = 3$.