



Gabarito 2 - Nível 2

1. A soma total das quantidades de pedras é $1+2+3+\dots+9+11 = 56$. Para que as pilhas possuam uma mesma quantidade k de pedras este inteiro deve ser um divisor de 56. Além disso, como alguma das pilhas no final do processo conterà a pilha com 11 pedras, cada uma deve ter 11 ou mais pedras. Analisando os divisores de 56, temos apenas as possibilidades 14, 28 e 56 como possíveis valores de k . Veja que a cada junção de pilhas, a quantidade total delas diminui em apenas uma unidade. Assim, para que no final tenhamos apenas uma pilha com 56 pedras, serão necessários 9 usos da operação. Para obtermos duas pilhas com 28, precisamos fazer 8 operações. Finalmente, para obtermos 4 pilhas com 14, precisamos usar 6 operações. De fato, podemos executar explicitamente essas 6 operações indicando-as pelo símbolo de + e agrupando as pilhas correspondentes entre parênteses:

$$(11 + 3), (9 + 5), (8 + 6), (7 + 4 + 2 + 1)$$

2. Em um conjunto com n elementos a quantidade de subconjuntos formados por dois de seus elementos é $\frac{n(n-1)}{2}$. Sejam x e y as quantidades de números pares e ímpares na lista de Janaína, respectivamente. Temos $x + y = 10$ e, pela condição dada no enunciado, $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = 4xy(*)$, pois a soma de dois números com paridades diferentes gera um número ímpar e a soma de dois números de mesma paridade gera um número par. Substituindo $y = 10 - x$ na última equação, podemos concluir que $x^2 - 9x + 10 = 0$. Essa equação possui duas soluções: $x = 1$ ou $x = 9$. Como $(x, y) = (9, 1)$ satisfaz a condição (*), o valor máximo de x é 9.
3. Como um intervalo de 7 dias consecutivos possui exatamente um domingo, o dia das mães sempre deve ocorrer após o dia 07 de maio. Como em algum ano o aniversário de Marta também foi dia das mães, seu aniversário acontece entre os dias 08 e 14 de maio.
4. Inicialmente note que dadas quaisquer três faces retangulares, sempre existem duas delas com uma aresta em comum. Como consequência disso, para pintarmos as faces retangulares, precisaremos de pelo menos três cores, pois se usarmos apenas duas existirão pelo menos três faces de uma mesma cor. Como as faces pentagonais não podem repetir as cores das faces retangulares, precisaremos de pelo menos mais uma cor. Um exemplo de tal coloração é pintar ambas as faces pentagonais de cinza, e as retangulares de branco, verde, azul, branco e verde, nessa ordem.
5. Seja x o número procurado. Então $2x = n^2$ e $3x = m^3$. Como n^2 possui pelo menos dois fatores 2, x é par. Consequentemente a fatoração em primos de m^3 deve conter pelo menos três fatores 2 e isso obriga x a ser múltiplo de 8. Usando agora que m^3 é múltiplo de 3 e, portanto, deve possuir pelo menos três fatores de tal primo em sua fatoração, podemos concluir que x é múltiplo de 9. Assim, x é múltiplo de 72. Como tal número satisfaz as duas condições do enunciado, ele é o menor valor interior positivo possível para x .
6. Após as últimas transferências, Carlos deve ter pago ao todo R\$32,00. Portanto, o valor das entradas do cinema foi $32 + 8 + 14 = 54$ e cada uma delas custou R\$18,00.